## Kapitel 2

**2104** a) 15 sätt b) 8 sätt

**2105** På 45 olika sätt.

**2106** 20 736 olika sätt.
*Lösning*:
$4^4 \cdot 3^4 = 20\,736$

**2107** a) 10 000 b) 9 000

**2108** a) 60 sätt
b) 47 sätt
*Lösning*:
$5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 47$
c) 19 sätt
*Lösning*:
$5 \cdot 3 + 4 = 19$

**2109** a) 12 167 000 olika skyltar
*Ledtråd*:
23 bokstäver kan användas.
b) Sannolikheten är
0,0043 = 0,43 %
*Ledtråd*:
Antalet gynnsamma utfall är
$1 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1$
c) 38 934 400 olika skyltar

**2110** På 260 000 olika sätt.

**2111** 9 sätt
*Lösning*:
Soha kan kombineras med de fem andra och Kirsty kan kombineras med de fem andra.
Soha tillsammans med Kirsty kommer med två gånger.
$5 + 5 - 1 = 9$

**2112** 6 vägar
*Lösning*:
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

**2113** a) 221 sätt
b) 372 sätt
c) 507 sätt

**2114** 64 tal

**2115** a) 192 sätt
b) 176 sätt
*Ledtråd*:
Minska med antalet sätt då bootsen används till finbyxor.
c) 117 sätt
*Lösning*:

| Skor (3) | Strumpor (4) | Byxor (4) | Skjortor (4) | Antal sätt |
|---|---|---|---|---|
| Lack | Svart | Fin | Vit | $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ |
| Lack | Svart | Ej Fin | Alla | $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$ |
| Ej Lack | Alla | Fin | Vit | $2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8$ |
| Ej Lack | Alla | Ej Fin | Alla | $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 96$ |
| | | | | Totalt 117 sätt |

**2116** Visa att $pq > p + q$ om $p \geq 2$ och $q > 2$ och båda är heltal.
$pq > p + q \Leftrightarrow pq - p > q \Leftrightarrow$
$p(q-1) > q \Leftrightarrow p > \dfrac{q}{q-1}$
Eftersom $p \geq 2$ måste $\dfrac{q}{q-1} < 2$
dvs. den givna olikheten gäller.

**2117** 158
*Ledtråd* :
Ett binärt tal mindre än 256 består som mest av 8 siffror.
Det finns totalt $2^6 = 64$ åtta-siffriga binära tal som börjar på två ettor och $2^5 = 32$ som slutar på två ettor. Av dessa både börjar och slutar $2^4 = 16$ på två ettor. Antalet åttasiffriga tal som börjar och/eller slutar på två ettor är alltså
$2^6 + 2^5 - 2^4 = 80$
Ett liknande resonemang ger antalet sjusiffriga och antalet sexsiffriga tal osv.

**2120** 5 040 sätt
*Ledtråd*:
Beräkna 7!

**2121** a) 24 b) 60

**2122** a) 120 sätt
*Lösning*:
$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
b) 1 320 sätt

**2123** a) 840 sätt
b) 35 sätt
*Ledtråd*:
$\dfrac{840}{4!}$

**2124** a) 311 875 200 sätt
*Lösning*:
$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 =$
$= 311\,875\,200$ sätt
b) 380 204 032 sätt
*Lösning*:
$52^5 = 380\,204\,032$ sätt

**2125** a) Beräkningen beskriver hur många sätt vi kan välja tre kulor av sex kulor om vi tar hänsyn till i vilken ordning kulorna väljs.
b) 20 sätt

**2126** a) 95 040 b) 792

**2127** a) 24 koder
b) 5 040 koder
c) 12 koder

**2128** a) 30 ord b) 6 ord

**2129** 20 sätt
*Lösning*:
$\dfrac{7 \cdot 6}{2!} - 1 = 20$

**2130** a) 24 sätt
*Ledtråd*:
Armbandet är symmetriskt bortsett från färg på pärlorna.
b) 362 880 sätt
*Ledtråd*:
9!

**2131** 325 ord

**2132** $n = 6$
*Motivering*:
$n = 5$ ger
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$
$n = 6$ ger
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$

**2136** a) $P(8, 3) = 336$
*Tolkning*:
Antalet sätt att välja 3 element av 8 givna med hänsyn till ordningen.
*Ledtråd*:
Använd digitalt verktyg för att bestämma $P(8, 3)$ t.ex. med verktyget $nPr(n, r)$

b) $\binom{10}{5} = C(10, 5) = 252$
*Tolkning*:
Antalet sätt att välja 5 element av 10 givna utan hänsyn till ordningen.
*Ledtråd*:
Använd digitalt verktyg för att bestämma $C(10, 5)$ t.ex. med verktyget $nCr(n, r)$

c) $P(13, 3) = 286$
*Tolkning*:
Antalet sätt att välja 3 element av 13 givna utan hänsyn till ordningen.

d) $P(7, 7) = 7! = 5040$
*Tolkning*:
Antalet sätt att välja 7 element av 7 givna med hänsyn till ordningen.

**2137** 28

**2138** a) $P(9, 2) =$
$$= \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$$
b) $C(7, 3) =$
$$= \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} =$$
$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5 = 35$$

**2139** a) $P(5, 1) = 5$
b) $P(5, 5) = 5! = 120$
c) $P(5, 0) = 1$

**2140** a) 3 003 sätt
b) 3 003 sätt
c) Antalet sätt att välja 10 blommor bland 15 är lika många som antalet sätt att välja 5 blommor bland 15.
När man väljer 10 blir 5 kvar.

**2141** a) 18! b) 144

**2142** 50 sätt
*Ledtråd*:
$$\binom{5}{3}\binom{5}{4}$$

**2143** a) **B**, **C** och **F** kan alla skrivas
$$\frac{20!}{(20-4)!}$$
b) **A**, **D** och **E** kan alla skrivas
$$\frac{20!}{4! \cdot 16!}$$

**2144** a) Talet 3 eller 12 ska stå i rutan.
b) Talet 14 ska stå i båda rutorna.
c) Talet 8 eller 12 ska stå i rutan till vänster och talet 20 i rutan till höger.

**2145** a) 35 sätt
b) 210 sätt
c) 45 sätt:
*Lösning*:
$$\binom{5}{3} + \binom{7}{4} = 10 + 35 = 45$$

**2146** **A** och **F**
**B**, **D** och **E**

**2147** a) $n + 1$ b) $(n + 3)!$

**2148** a) $k = 50$
*Ledtråd*:
Bryt ut 8!
b) *Lösning*:
$$\text{VL} = a \cdot n! + a(n+1)! =$$
$$= a \cdot n! + a \cdot (n+1) \cdot n! =$$
$$= a \cdot n! \cdot (1 + n + 1) =$$
$$= a \cdot n! \cdot (n + 2) = \text{HL}$$
V.S.V.

**2149** a) *Lösning*:
$a = 4$ ger
$$\text{VL} = \binom{10}{a} = \binom{10}{4} =$$
$$= \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$$
$$\text{HL} = \binom{10}{10-a} = \binom{10}{10-4} =$$
$$= \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} =$$
$$= \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \binom{10}{4}$$
V.S.V.

b) *Lösning*:
$$\text{VL} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
$$\text{HL} = \binom{n}{n-k} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
VL = HL
V.S.V.

**2150** 540 sätt
*Ledtråd*:
Beräkna antalet sätt att välja 7 personer av 12 och minska med det antal där både Nils och Sally ingår.

**2151** Eriks beräkning: Beräkningen ger antalet sätt att välja 9 ungdomar och 1 tränare eller 8 ungdomar och 2 tränare eller 7 ungdomar och 3 tränare.

Filips beräkning:
Det totala antalet urval minskat med antalet urval utan någon tränare.
$C(26, 10) - C(23, 10) =$
$= 4\,167\,669$
Beräkningen ger antalet sätt att välja 9 ungdomar och 1 tränare eller 8 ungdomar och 2 tränare eller 7 ungdomar och 3 tränare.

**2152** $\frac{51}{66} \approx 0{,}77 = 77\,\%$

**2153** *Lösning*:

VL = $P(n, n) =$

$= \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

HL = $P(n, n-1) =$

$= \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = \frac{n!}{1} = n!$

VL = HL

V.S.V.

**2154** $\binom{10}{3} = 120$ sätt

*Ledtråd*:
Välj ut 3 av 10 förflyttningar som ska vara åt höger på kartan.

**2157** 1 820 sätt

**2158** a) 720 sätt  b) 1 440 sätt

**2159** a) 140 koder  b) 180 koder

**2160** a) T.ex:
Fem rum ska städas.
På hur många sätt kan man göra ett städschema för i vilken ordning rummen ska städas?

b) T.ex:
På hur många sätt kan man besvara 5 frågor av typen sant eller falskt?

c) T.ex:
På hur många sätt kan man välja ut fem låtar av sju föreslagna till en spellista, där man tar hänsyn till ordningen på låtarna?

**2161** a) 29 760 sätt

b) Sannolikheten är
$\frac{6}{4\,960} \approx 0{,}0012$

**2162** a) Det finns 2 598 960 pokerhänder.

b) 2 023 203

**2163** Sannolikheten är 15,5 %.
*Ledtråd*:
Antalet sätt att få femma i tre av kasten är $1^3 \cdot 5^7 \cdot \binom{10}{3}$

**2164** a) Ja.
*Motivering*:
Det finns
$3^{16} = 43\,046\,721$ sätt.

b) Nej.
*Motivering*:
Det finns 33 tipsrader
$(16 \cdot 2 + 1)$ med minst 15 rätt.

**2165** a) 200 sätt
*Ledtråd*:
Addera antalet sätt att få en gul, två gula respektive tre gula dekorationer.

b) 262 sätt

**2166** a) 362 880 sätt
*Lösning*:
$2! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 3! = 362\,880$

b) Sannolikheten är
0,000758 = 758 ppm

**2167** Det finns 5 005 binära tal.

**2168** a) 286 sätt
*Förklaring*:
Alla dekorationer kan, men behöver inte användas. Vi placerar ett streck mellan kakor med olika dekorationer.

Det krävs 3 streck för att skilja de fyra dekorationerna åt.

Vi får en rad med 13 symboler, 10 kakor och 3 streck.

● ● ● | ● ● | ● ● ● | ● ●

3 streck fördelas på 13 platser på $\binom{13}{3} = 286$ olika sätt.

b) 84 sätt
*Ledtråd*:
Fyra kakor har bestämda dekorationer.

På hur många sätt kan de övriga dekoreras?

## Tema: Poker och Yatzy

**1** 2 598 960

**2** a) 1 098 240
*Lösning*:
1 valör av 13.
2 färger av 4.
3 andra valörer av 12 som kan ha 4 olika färger

$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3$

b) 54 912
*Lösning*:
1 valör av 13.
3 färger av 4.
2 andra valörer av 12 som kan ha 4 olika färger

$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2$

c) 624
*Lösning*:
1 valör av 13.
4 färger av 4.
1 kort med annan valör

$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{1}$

**3** a) 40
*Lösning*:
10 stegar i 4 färger.
$10 \cdot 4$

b) 10 200
*Lösning*:
10 stegar och varje kort kan väljas i fyra färger.
Antalet minskas med färgstegarna.
$10 \cdot 4^5 - 40$

c) 5 108
*Lösning*:
4 färger gånger 5 valörer i samma färg minskat med stegarna i färg.

$4 \cdot \left(\binom{13}{5} - 10\right)$

**4** 3 744

*Lösning*:

1 av 13 valörer till paret.

1 av 12 valörer till trissen.

2 av 4 färger i en valör.

3 av 4 färger i en valör.

$\binom{13}{1} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3}$

**5** a) $\frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \approx 0{,}423$

b) $\frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0{,}048$

c) $\frac{54\,912}{2\,598\,960} \approx 0{,}021$

d) $\frac{624}{2\,598\,960} \approx 0{,}000\,24$

e) $\frac{40}{2\,598\,960} \approx 0{,}000\,015$

f) $\frac{10\,200}{2\,598\,960} \approx 0{,}0039$

g) $\frac{5\,108}{2\,598\,960} \approx 0{,}0020$

h) $\frac{3\,744}{2\,598\,960} \approx 0{,}0014$

Rangordning efter sannolikhet:

- Stege i färg (straight flush inkl. royal straight flush)
- Fyrtal
- Kåk
- Färg
- Stege
- Triss
- Två par
- Ett par

Denna rangordning gäller i poker.

**6** 7 776

*Lösning*:

$6^5$

**7** a) 150

*Lösning*:

1 valör av 6.

4 tärningar av 5.

1 tärning av annan valör.

$\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{4} \cdot 5$

b) 1 200

*Lösning*:

1 valör av 6.

3 tärningar av 5.

2 tärningar av annan valör, men inte samma.

$\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 4$

c) 1 800

*Lösning*:

2 valörer av 6. 4 tärningar av 5.

Permutation av 4 tärningar där de visar lika 2 och 2.

1 tärning av annan valör.

$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{4} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 4$

d) 300

*Lösning*:

1 valör av 6 till paret.

1 valör av 5 till trissen.

3 tärningar av 5 till trissen (de andra till paret).

$\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{3}$

e) 240

*Lösning*:

5! + 5!

f) 6

*Kommentar*:

Alla tärningarna ska visa samma antal prickar: 1, 2, 3, 4, 5 eller 6.

**8** a) $\frac{3\,600}{7\,776} \approx 0{,}463$

b) $\frac{1\,800}{7\,776} \approx 0{,}231$

c) $\frac{1\,200}{7\,776} \approx 0{,}154$

d) $\frac{150}{7\,776} \approx 0{,}019$

e) $\frac{300}{7\,776} \approx 0{,}039$

f) $\frac{240}{7\,776} \approx 0{,}031$

g) $\frac{6}{7\,776} \approx 0{,}000\,77$

**2204** a) $(x+y)^3 =$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

c) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 +$
$+ 4xy^3 + y^4$

d) $(x+2y)^4 =$
$= x^4 + 4x^3 2y + 6x^2(2y)^2 +$
$+ 4x(2y)^3 + (2y)^4 =$
$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 +$
$+ 32xy^3 + 16y^4$

**2205** a) $x^5$, $15x^4y$ och $90x^3y^2$

*Ledtråd*:

Andra termen: $5x^4 \cdot 3y$

Tredje termen: $10x^3 \cdot (3y)^2$

b) $x^5$, $-15x^4y$ och $90x^3y^2$

**2206** a) $21x^5y^2$ och $-35x^4y^3$

b) $103\,680a^8b^2$ och $414\,720a^7b^3$

*Ledtråd*:

Tredje termen:

$45(2a)^8 \cdot (3b)^2$

Fjärde termen:

$120(2a)^7 \cdot (3b)^3$

**2207** a) $\binom{7}{3} = 35$

b) $\binom{6}{2} = 15$

c) $\binom{6}{3} = 20$

d) Summan av antalet urval där lördag ingår och antalet urval där lördag inte ingår är lika stor som svaret i a).

**2208** a) $\binom{27}{5} = 80\,730$

b) $\binom{26}{4} = 14\,950$

c) $\binom{26}{5} = 65\,780$

**2209** T.ex. Adam planerar att arbeta 4 månader nästa år.

Visa att summan av antalet urval där juli ingår och antalet där juli inte ingår är lika med antalet sätt som 4 månader av 12 kan väljas ut.

**2210** a) 1 9 36 84 126
126 84 36 9 1
*Ledtråd*:
Varje tal är summan av de båda närmaste talen i raden ovanför.

b) $120a^7b^3$ och $120a^3b^7$

**2211** a) $\binom{11}{7} = \binom{11}{4} = 330$

b) –945
*Ledtråd*:
$\binom{7}{3} \cdot x^4 \cdot (-3y)^3$

**2212** a) Ja.
*Lösning*:
$\binom{5}{2} \cdot (2x)^3 \cdot (-y)^2 = 80x^3y^2$

b) Ja.
*Lösning*:
$\binom{5}{2} \cdot (2x)^3 \cdot y^2 = 80x^3y^2$

c) Nej.

**2213** Konstanttermen är 86 493 225.

**2214** *Lösning*:

$$\text{VL} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\text{HL} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \frac{3(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) - 3(n-1)(n-2) + 3(n-1)(n-2)}{6} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

VL = HL
V.S.V.

**2215** $a = 2$

**2216** a) $s_n = 2^n$
b) *Ledtråd*:
Visa med ett induktionsbevis.

**2217** *Ledtråd*:
Tillämpa Pascals formel upprepade gånger på $\binom{n+1}{k+1}$

**2221** 5

**2222** Lådor: månadens dagar (max 31)

Föremål: 32 personer

32 personer på 31 dagar betyder att åtminstone 2 personer har samma födelsedatum någon månad.

**2223** Lådor: $n = 5$ länder

Föremål: 31 elever
$31 = 5 \cdot 6 + 1$
(6 elever från varje land och ytterligare 1 elev)

Minst ett land måste vara representerat av

$6 + 1 = 7$ elever eller fler.

**2224** Lådor: 27 stater
Föremål: 705 personer
$705 > 27 \cdot 26 + 1$

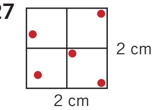
Minst ett land måste vara representerat av
$26 + 1 = 27$ personer eller fler.

**2225** a) 3 b) 9 c) 10

**2226** $n + 1$
*Motivering*:
Låt varje gift par svara mot en låda. Placera ut personerna i de $n$ lådorna.

Då krävs minst $n + 1$ personer för att säkert få ett gift par.

**2227**




Lådor: 4 kvadrater med sidan cm

Föremål: 5 punkter

Minst en kvadrat får 2 eller flera punkter. Maximal-avståndet mellan dessa är lika med diagonalens längd, $\sqrt{2}$ cm.

**2228** a) Lådor: 4 färger
Föremål: 50 tröjor
$50 > 4 \cdot 12 + 1$
Det måste finnas en färg med minst $12 + 1 = 13$ tröjor.

b) Lådor: 3 färger
Föremål: 42 tröjor
$42 > 3 \cdot 13 + 1$
Det måste finnas en färg med minst $13 + 1 = 14$ tröjor.

**2229** 28 748
*Ledtråd*:
$10\,521\,556 > 28\,747 \cdot 366 + 1$

**2230** a) 32 pjäser b) 16 pjäser

**2231** Medianlönen anger att
$\frac{8\,100\,000}{2} = 4\,050\,000$ personer
tjänade mindre än 33 000 kr.

$4\,050\,000 > 33\,000 \cdot 120 + 1$

Minst 121 personer hade exakt på kronan samma lön (mindre än 33 000 kr).

**2232** Lådor: 6 st 2-dagars perioder
Föremål: 70 timmar
$70 > 6 \cdot 11 + 1$

Under minst en 2-dagars period måste hon ha övat $11 + 1 = 12$ timmar eller mer.

**2233** Triangeln delas i 9 kongruenta deltrianglar med sidan 2 cm.

Minst en triangel får 2 punkter eller fler. Avståndet mellan dem är högst 2 cm.

**2234** 3 st. En rad med bara 1:or, en rad med bara X och en rad med bara 2:or.

*Ledtråd*:
Den jämnaste fördelningen av 1X2 är 4 + 4 + 5.

---

**2303** a) Påstående **A** är sant.
Påstående **B** är falskt.
Påstående **C** är sant.
Påstående **D** är sant.

b) Mängden **M** har 8 delmängder.
*Lösning*:
3 element ger
$2^3 = 8$ delmängder.

c) $\{\emptyset\}, \{5\}, \{15\}, \{5, 15\}$

**2304** a) $4 \in \mathbb{N}$

b) $\pi \in \mathbb{R}$

c) $\pi \notin \mathbb{Q}$

d) $\{5, 10\} \subseteq \{5, 10, 20\}$

e) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

f) $\emptyset \subseteq \mathbb{Z}$

**2305** a) $\notin$  d) $\notin$

b) $\in$  e) $\in$

c) $\notin$  f) $\notin$

**2306** a) $\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

b) $\mathbf{B} = \{13, 17, 19\}$

c) $\mathbf{C} = \{2, 4, 6, 8\}$

d) $\mathbf{D} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

**2307** a) $\mathbf{A} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ och } 0 < x < 7\}$

b) $\mathbf{A} = \{x \mid x \equiv 0 \pmod 5) \text{ och } x > 0\}$

c) $\mathbf{A} = \{x \mid x \text{ är ett udda tal och } 4 < x < 16\}$

**2308** a) {Bo, My, Pi}, {Bo, My, Ia}, {My, Pi, Ia}, {Bo, Pi, Ia}

b) {Bo, My}, {Bo, Pi}, {Bo, Ia}, {My, Pi}, {My, Ia}, {Pi, Ia}

**2309** a) $2^4 = 16$
*Ledtråd*:
$\{a, a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

b) $2^7 = 128$

**2310** a) $\mathbf{D} = \{1, 2, 3\}$

b) $\mathbf{D} = \{3, 6, 9\}$

c) $\mathbf{D} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

d) $\mathbf{D} = \{2, 6, 10\}$

**2311** a) 4 mängder
*Lösning*:
$\{a\} \subset X$ betyder att a måste ingå i X. Vi kan sedan välja att ha med eller inte ha med element b och c på $2^2 = 4$ sätt.

b) 8 mängder

**2312** a) $\mathbf{M} = \{-1, 7\}$

b) $\mathbf{M} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

c) $\mathbf{M} = \{2, 5, 8\}$

d) $\mathbf{M} = \{3, 6, 12, 24\}$

**2313** Ja, det är sant.
*Motivering*:
Mängden **A** består av 3 element och har 8 delmängder.
Mängden **B** består av 2 element och har 4 delmängder.

**2314** a) Talen är 1, 13 och 25.

b) Ja, det stämmer.
*Motivering*:
$\mathbf{A} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25\ldots\}$
$\mathbf{B} = \{1, 13, 25\ldots\}$

**2315** Mängderna saknar gemensamma element.

**2316** Det minsta möjliga heltalet är $a = 30$.
*Lösning*:
Eftersom $128 = 2^7$ finns det 7 element i mängden.

$\text{SGD}(x, 60) = 1$ innebär att $x$ inte får innehålla faktorerna 2, 3, eller 5 då $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

De tal som är större än 1 och ger så litet $a$ som möjligt är: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

**2319** a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{C} = \{a, c, k, p, z\}$

b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{a, k\}$

c) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \{a, p\}$

d) $\mathbf{B} \cup \mathbf{C} = \{a, c, i, k, p\}$

e) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{c, z\}$

f) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A} = \{i, p\}$

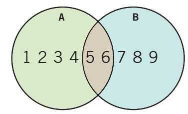
**2320** a) $\{2\}$

b) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $\{1\}$

d) $\{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$

**2321**




**2322** a) Område 2

b) Område 1, 2 och 3

c) Område 3

d) Område 3 och 4

**2323** a) $\complement\mathbf{A} = \{1, 5, 8, 10, 11, 45\}$

b) $\complement\mathbf{A} = \{1, 8, 10, 15, 21, 45\}$

c) $\complement\mathbf{A} = \{1, 5, 7, 8, 10, 11\}$

d) $\complement\mathbf{A} = \{3, 8, 10, 11, 21, 45\}$

**2324** a) $\complement\mathbf{A} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

b) $\mathbf{P} \cap \mathbf{T} = \{3\}$

c) $\mathbf{P} \cap \complement\mathbf{A} = \{2\}$

d) $\complement\mathbf{A} \cap \mathbf{T} = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$

**2325** a) Ja, det är sant.
*Motivering*:
Alla liksidiga trianglar är också likbenta.

b) Nej, det är inte sant.
*Motivering*:
Det finns rätvinkliga trianglar som inte är likbenta.

**2326** a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

c) $\{1, 3, 5, 7\}$

**2327** a) $\mathbf{B}^C$

b) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

c) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^C$

**2328** a) T.ex. $\mathbf{A} = \{a, b, d, f\}$
*Kommentar*:
**A** måste innehålla elementen a, b och d, men får inte innehålla c och e.

b) $\mathbf{C} = \{a\}$
*Kommentar*:
**C** måste innehålla element a, men får inte innehålla b, c, d och e.
**C** är också delmängd till **B** och kan därför bara innehålla a.

**2329** a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \mid x \leq 8\}$

b) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \{x \mid 4 < x < 5\}$

c) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{C} = \{x \mid 5 \leq x \leq 8\}$

d) $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{A} = \{x \mid 3 \leq x < 6\}$

**2330** Talen är 12, 30 och 48.

**2331** $a = 7$
*Lösning*:
Mängden $\mathbf{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
Då $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ får **A** inte ha några element som finns i **B**.

$x \equiv 0 \pmod{1 \text{ eller } 2}$ ger att $x$ kan vara 2.

$x \equiv 0 \pmod 3$ ger att $x$ kan vara 3, 6 osv.

$x \equiv 0 \pmod 4$ ger att $x$ kan vara 4, 8 osv.

$x \equiv 0 \pmod 5$ ger att $x$ kan vara 5, 10 osv.

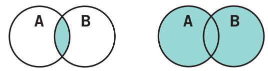
$x \equiv 0 \pmod 6$ ger att $x$ kan vara 6, 12 osv.

$x \equiv 0 \pmod 7$ ger att $x$ kan vara 7, 14 osv.

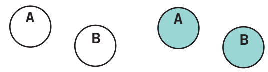
$a$ måste därför vara minst 7.

**2335** 16 barn
*Ledtråd*:
$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$

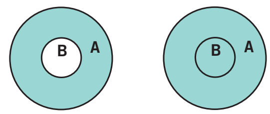
**2336** a) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$



b) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$



c) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$



**2337** a) Mängden av alla trianglar och mängden av alla fyrhörningar har inga gemensamma element.

Det finns inga trianglar som är fyrhörningar eller tvärtom.

b) Alla rektanglar ingår i mängden fyrhörningar eftersom alla rektanglar också är fyrhörningar.

**2338** a) 6 och 12

b) 20

c) Inget av talen

**2339** a) 2 personer

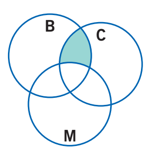
b) 10 personer

c) 28 personer

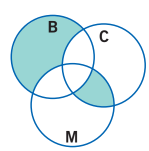
d) 20 personer

**2340**

a)




b)




**2341** a) **P**

b) $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$

c) $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ eller $\mathbf{P} \cap \mathbf{R}$

**2342** 90 hushåll
*Ledtråd*:
$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$

**2343** a) $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

b) $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

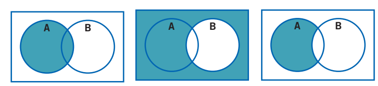
c) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$

d) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

**2344** Vi utgår från ett Venndiagram med mängderna **A**, **B** och en grundmängd.

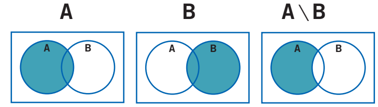
Vänster led:
Vi markerar mängderna $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^c$ och $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c$ i tre olika diagram.

$\mathbf{A}$ $\mathbf{B}^c$ $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c$



Höger led:
Vi markerar mängderna **A**, **B** och $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ i tre olika diagram.

$\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$ $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$



Vi ser i figurerna till höger att $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c$ och $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ är lika.

V.S.V.

**2345** a) 10 elever b) 4 elever
*Ledtråd*:
Rita ett Venndiagram med de tre mängderna.

Börja med att fylla i det antal elever som gick på alla tre föredragen.

**2346** a) Ja.

*Förklaring*:
Tre element ska ingå i både **A** och **B**. T.ex. $\{1, 2, 3, 4\}$ och $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) Ja.

*Förklaring*:
Om mängden **A** är en delmängd av mängden **B**.
T.ex. $\{1, 2, 3, 4\}$ och $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) Nej.

*Motivering*:
Grundmängden måste innehålla minst 11 element eftersom 1 element ska ingå i både **A** och **B**, 4 element ska ingå i endast **B** och 6 element ska ingå i endast **A**.

d) Nej.

*Motivering*:
$|\complement \mathbf{A}| = 3$ och $|\complement \mathbf{B}| = 5$
Unionen mellan dessa mängder kan inte innehålla mindre än 5 element.

**2347** a) Mängden **A**

*Motivering*:
Kvadrater, rektanglar och romber är delmängder av mängden parallellogrammer.

b) Mängden $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$

*Motivering*:
Kvadrater tillhör mängden rektanglar (två par parallella sidor och räta vinklar) och kvadrater tillhör mängden romber (alla sidor lika långa).

c) Mängden **D**

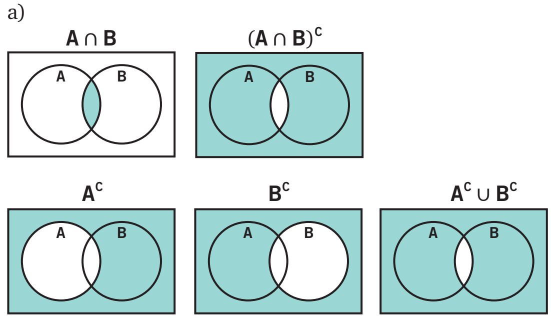
*Motivering*:
Parallelltrapetser definieras som fyrhörningar med minst två parallella sidor. Mängderna **A**, **B** och **C** tillhör mängden **D**.

d) Mängden **C**

*Motivering*:
Romber tillhör mängden parallellogrammer men inte mängden rektanglar.

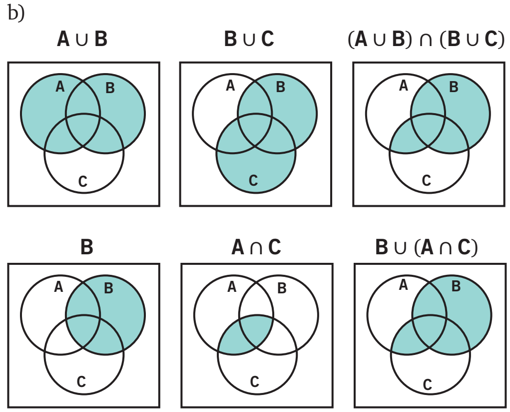
**2348**

a)



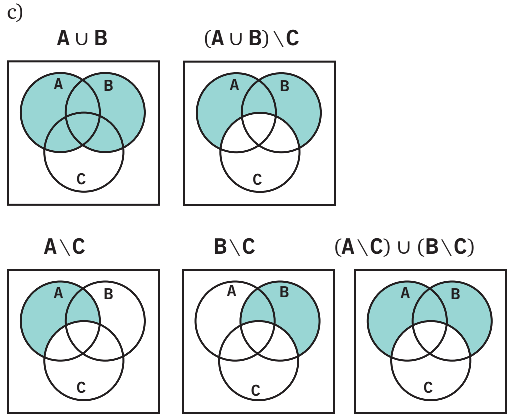

Vi ser i figurerna längst till höger att $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^C = \mathbf{A}^C \cup \mathbf{B}^C$

b)




Vi ser i figurerna längst till höger att $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$.

c)




Vi ser i figurerna längst till höger att $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{C})$.

**2349** $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}| =$
$= |\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}| - |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}| - |\mathbf{C}| +$
$+ |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| + |\mathbf{A} \cap \mathbf{C}| + |\mathbf{B} \cap \mathbf{C}|$

## Testa dig själv 2

**1** a) 504 möjliga koder

b) 1 000 möjliga koder

**2** 243 valmöjligheter

*Lösning*:

$3^5 = 243$

**3** a) 48

b) 20

c) 10

d) 5 050

*Lösning*:

$\binom{101}{99} = \binom{101}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} =$

$= \frac{10\,100}{2} = 5\,050$

**4** 56

*Ledtråd*:

$\binom{8}{3}$

b) 336

**5** 60

*Ledtråd*:

$\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2}$

**6** a) $1 + 6a + 15a^2 + 20a^3 +$
$+ 15a^4 + 6a^5 + a^6$

b) $32x^5 - 80x^4y +$
$+ 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$

**7** a) 3 b) 8

**8** a) Sant.

*Motivering*:

7 är ett primtal mindre än 10.

b) Falskt.

*Motivering*:

Delmängden kan inte innehålla fler element än mängden.

c) Sant.

*Motivering*:

En mängd med 2 element har $2^2$ delmängder.

d) Sant.

*Motivering*:

Ekvationen saknar reella lösningar.

**9** a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{4\}$

b) $\mathbf{B} \cup \mathbf{C} = \{4, 5, 6, 7\}$

c) $\complement \mathbf{B} \setminus \mathbf{C} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

d) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \{5, 6\}$

**10** a) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

b) $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

**11** 58 ungdomar tävlar i endast tresteg eller endast längdhopp.

## Blandade övningar 2

**1** a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{a, b, c, d, e, f\}$

b) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{C} = \{b, e, f\}$

c) $\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \{a, c\}$

d) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \{c, d\}$

e) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \{c\}$

f) $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}| = 7$

**2** a) $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$

b) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^{\mathrm{c}}$

**3** 9 personer

**4** 33 sätt

*Lösning*:

$3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 33$

**5** 13 karameller

**6** a) 120 urval

*Ledtråd*:

$\binom{10}{3}$

b) 56 urval

*Ledtråd*:

$\binom{8}{3}$

c) 64 urval

**7** a) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

b) $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$

c) $\binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

*Ledtråd*:

Symmetri ger

$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$

d) $\binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)n}{2}$

*Ledtråd*:

Använd symmetri.

**8** a) 24 permutationer

b) 12 permutationer

c) 6 permutationer

d) 4 permutationer

**9** Alla $n! > 1!$ innehåller faktorn 2.

**10** a) $\text{HL} = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1} =$

$= 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} + m =$

$= m^2 - m + m = m^2 = \text{VL}$

V.S.V.

b) Pascals formel ger

$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1}$

Symmetriegenskapen hos $\binom{n}{k}$ kan uttryckas som

$\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ för $n \geq 1$.

Alltså är $\binom{2n}{n} =$

$= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n-1} =$

$= 2\binom{2n-1}{n-1}$

för $n \geq 1$.

V.S.V.

**11** a) Alla element som tillhör antingen **A** eller **B**, men inte både **A** och **B**.

b) Om $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \emptyset$ innebär detta att **A** och **B** är lika.

**12** Ja, t.ex. $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$,
$\mathbf{B} = \{1, 2, 3\}$ och $\mathbf{C} = \{3, 4, 5, 6\}$

**13** $\binom{20}{10} = 184\,756$

**14** a) $\binom{19}{6} = 27\,132$

*Tolkning*:
Det finns 27 132 sätt att välja 6 av 19 element om man inte tar hänsyn till i vilken ordning elementen väljs.

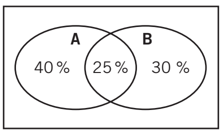
b) $P(19, 6) = 19\,535\,040$

*Tolkning*:
Det finns 19 535 040 sätt att välja 6 av 19 element om man tar hänsyn till i vilken ordning elementen väljs.

c) $C(19, 6) = \binom{19}{6} = 27\,132$

*Tolkning*:
Se a)-uppgiften.

**15** a)




**A** = {alla som vill åka skidor}

**B** = {alla som vill åka skridskor}

b) 5 %

**16** a) $\text{VL} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\cdot 6!}$

$\text{HL} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} =$

$= \frac{9!}{6!\cdot 3!}$

VL = HL
V.S.V.

b) I en grupp på nio personer ska man välja tre personer som får göra en resa. Det kan göras på $\binom{9}{3} = 84$ sätt.

Det finns lika många sätt $\binom{9}{6} = 84$ att välja de sex personer som inte får resa.

**17** a) $9x^4 - 6x^2y^3 + y^6$

b) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

c) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

d) $z^{10} + 15z^8u + 90z^6u^2 + {}$
$+ 270z^4u^3 + 405z^2u^4 + 243u^5$

**18** $6x^5 + 15x^4h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + {}$
$+ 6xh^4 + h^5$

**19** Det beror på om man tar hänsyn till i vilken ordning han ska lyssna på böckerna.

Det finns nästan 39 miljoner (38 955 840) sätt om man tar hänsyn till ordningen.

Det finns 324 632 sätt om man inte tar hänsyn till ordningen.

**20** a) I mängden **B**.

*Motivering*:
De liksidiga trianglarna är en delmängd av de likbenta trianglarna **A**.

b) I mängden **C**.

*Motivering*:
De rätvinkliga trianglarna har gemensamma element med mängden likbenta trianglar, **A**, men är inte en delmängd av **A**.

c) De likbenta och rätvinkliga trianglarna.

*Motivering*:
Det färgade området är snittet av likbenta trianglar, **A**, och rätvinkliga trianglar, **C**.

**21** a) 64 ord

b) 27 ord

*Lösning*:
$\binom{3}{1} \cdot 3^2 = 27$

c) $64^{200}$ sätt

**22** a) 120 sätt

b) 48

*Lösning*:
$4! + 4! = 48$

**23** a) 8 190

*Lösning*:
$\binom{13}{2} \cdot \binom{15}{2} = 8\,190$

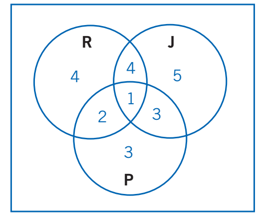
b) 0,4

**24** Det finns tre talpar med summan 7.

Om vi tar 4 tal får vi åtminstone ett sådant par.

**25** 7 elever

*Lösning*:



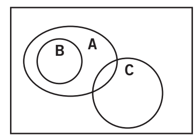

Totalt 29 – 22 = 7

**26** 159 744

**27** a) $(n-1)!(n-1)$

b) $n!(n^2 + 3n)$

**28**




**29** a) $\binom{52}{13} \approx 6{,}35 \cdot 10^{11}$ bridgehänder

b) $6{,}69 \cdot 10^{10}$ bridgehänder

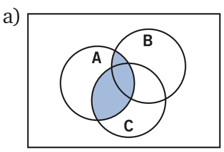
*Lösning*:
$\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3}^3 \approx 6{,}69 \cdot 10^{10}$

c) $6{,}27 \cdot 10^{11}$ bridgehänder

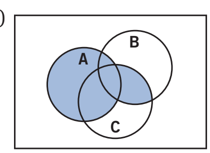
*Lösning*:
$\binom{52}{13} - \binom{39}{13} \approx 6{,}27 \cdot 10^{11}$

**30** Båda leden ger samma Venndiagram.

a)




b)




**31** 594 handhälsningar

**32** Anta att vi är intresserade av att veta om någon grupp av $n$ decimaler kommer att upprepa sig.

En grupp med $n$ decimaler kan bildas på $10^n$ olika sätt.
En decimalutveckling med $x$ decimaler innehåller $x - n + 1$ grupper med $n$ decimaler.

Enligt lådprincipen kommer därför minst en grupp med $n$ siffror att upprepa sig när $x - n + 1 > 10^n$, dvs. om vi decimalutvecklar med fler än $10^n + n - 1$ decimaler.

**33** 1 820 sätt
*Förklaring*:
Vi placerar ett streck mellan de olika bullarna. Det krävs 4 streck för att skilja de fem bullsorterna åt. Vi får en rad med 16 symboler, 12 bullar och 4 streck.

4 streck fördelas på 16 platser

på $\binom{16}{4} = 1\,820$ olika sätt.

**34** a) 190 590 400 sätt
b) 75 675 600 sätt

## Blandade övningar 1 – 2

**1** a) $13_{\text{tio}}$ b) $140_{\text{fem}}$

**2** a) $\{5, 6\}$ b) $\{4, 5, 6, 7\}$

**3** Nej.
*Motivering*:
Det finns 13 olika valörer, så man måste dra 14 kort för att säkert få 2 kort av samma färg.

**4** a) $a_4 = 42$
b) Summan är 62.

**5** Den andra termen är $240a^4b$
Den fjärde termen är $1\,080a^2b^3$

**6** a) 56 b) 40 200

**7** *Lösning*:
$a$ och $b$ är delbara med $k$ kan skrivas
$a = n \cdot k$ och $b = m \cdot k$,
där $n$ och $m$ är heltal.
*Påstående*:
$xa + yb = l \cdot k$ ($l$ är ett heltal)
*Bevis*:
$\text{VL} = xa + yb = x \cdot nk + y \cdot mk =$
$= k(xn + ym) = k \cdot l = \text{HL}$

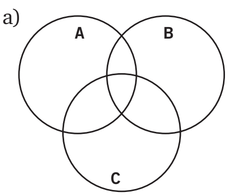
**8** a) $O_3 = \pi r$
*Ledtråd*:
Den första inskrivna kvadraten har sidan $\sqrt{2}\, r$.

b) $O_n = \dfrac{2\pi r}{(\sqrt{2})^{n-1}}$

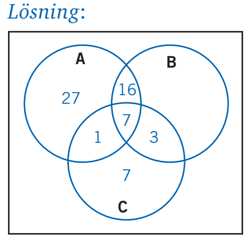
**9** a) *Lösning*:
$a \equiv b \pmod 6 \Leftrightarrow a - b = p \cdot 6$
$c \equiv d \pmod 6 \Leftrightarrow c - d = q \cdot 6$
$(a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d) =$
$= 6p + 6q = 6(p + q) \Leftrightarrow$
$a + c \equiv b + d \pmod 6$

b) *Lösning*:
$a \equiv b \pmod 6 \Leftrightarrow a - b = p \cdot 6$
$c \equiv d \pmod 6 \Leftrightarrow c - d = q \cdot 6$
$ac - bd = ac - bc + bc - db =$
$= c(a - b) + b(c - d) =$
$= c \cdot p \cdot 6 + b \cdot q \cdot 6 =$
$= 6(cp + bq)$

**10** a)




b) $|(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \setminus \mathbf{C}| = 16$
$|(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}| = 7$
*Lösning*:




c) $\mathbf{B} \setminus (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$

**11** *Lösning*:
1. För $n = 1$ får vi
$\text{VL} = 4 \cdot 5^0 = 4$
$\text{HL} = 5^1 - 1 = 4$
VL = HL, dvs formeln gäller för $n = 1$.
2. Antagande (formeln gäller för $n = p$)
$\sum_{k=1}^{p} 4 \cdot 5^{k-1} = 5^p - 1$
Påstående (formeln gäller för $n = p + 1$)
$\sum_{k=1}^{p+1} 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{p+1} - 1$
*Bevis*
$\text{VL} = \sum_{k=1}^{p+1} 4 \cdot 5^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} 4 \cdot 5^{k-1} +$
$+ 4 \cdot 5^{p+1-1} = 5^p - 1 + 4 \cdot 5^p =$
$= 5 \cdot 5^p - 1 = 5^{p+1} - 1 = \text{HL}$
V.S.V.

**12** *Lösning*:
$\text{VL} = \binom{n+1}{k} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

$\text{HL} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$

$= \dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} +$

$+ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} =$

$= \dfrac{kn! + (n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} =$

$= \dfrac{n!(k+n+1-k)}{k!(n+1-k)!} =$

$= \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

VL = HL
V.S.V.

**13** a) 792 sätt
b) 350 sätt
*Lösning*:
$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} =$
$= 350$

**14** Ja.
*Motivering*:
Antalet sätt att välja 200 element bland 500 är alltid lika med antalet sätt att välja 500 – 200 = 300 element bland 500.

Allmänt gäller

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**15** 59 048
*Ledtråd*:
Lös ekvationen
$6 \cdot k^3 = 162$

**16** a) 250 mg (249,92)

b) 250 mg

**17** a) $P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = 0{,}7$ vilket innebär att sannolikheten är 70 % att en slumpvis vald person är ett barn och/eller bor i närheten av festivalen.

b) $P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 0{,}4$ vilket innebär att sannolikheten är 40 % att en slumpvis vald person är ett barn som bor i närheten av festivalen.

**18** 705 430 sätt
*Lösning*:

$$\binom{22}{11} - 2$$

**19** a) 11 personer

b) 325 dollar

**20** a) {∅}, {**A**}, {**B**}, {**C**}, {**A**, **B**}, {**A**, **C**}, {**B**, **C**}, {**A**, **B**, **C**}

b) 32 delmängder

c) $2^6$ är dubbelt så mycket som $2^5$.

d) 17 personer

**21** a) 4 tävlande ger 24 möjliga placeringslistor.

5 tävlande ger 120 möjliga placeringslistor.

b) $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = a_n \cdot (n+1)$

**22** a) *Lösning*:
Det räcker med ett motexempel, t.ex. dubbla 3, 4, 5 till 6, 8, 10.

b) *Lösning*:
Vi antar att påståendet är falskt, alltså att det finns pythagoreiska tripplar med endast udda tal.

I så fall kan $a$, $b$ och $c$ skrivas:

$a = 2k + 1$
$b = 2m + 1$
$c = 2n + 1$

där $k$, $m$ och $n$ är heltal.

$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 =$
$= 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 =$
$= 2(2k^2 + 2k + 2m^2 + 2m + 1)$

$a^2 + b^2$ är alltså ett jämnt tal.

$c^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 =$
$= 2(2n^2 + 2n) + 1$

$c^2$ är alltså ett udda tal.

Det innebär att $a^2 + b^2 \neq c^2$ och vårt antagande måste vara falskt.

Det ursprungliga påståendet måste alltså vara sant, dvs. det finns inga pythagoreiska tripplar med endast udda tal.

V.S.V.

**23** a) Sannolikheten är 0,31.
*Lösning*:

$$\frac{\binom{17}{3} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{29}{6}} \approx 0{,}31$$

b) Sannolikheten är 0,83.
*Ledtråd*:
Börja med att beräkna sannolikheten för ingen hallonbåt och för en hallonbåt.

**24** a) 216 utfall

b) 21 utfall
*Ledtråd*:
Permutationer av
1 1 6 , 1 2 5 osv.

**25** 2 220 kvinnor och barn

**26** a) $x = 14$   b) $x = 29$

**27** a) 5 040 sätt

b) 144

c) 144 sätt

d) 720 sätt

e) 1 440 sätt
*Lösning*:
$6! \cdot 2 = 1440$

**28** *Lösning*:
1. För $n = 1$ får uttrycket värdet 3 som är delbart med 3.

2. Induktionsantagande (påståendet stämmer för $n = p$)

   $p(p^2 + 2) = k \cdot 3$, där $k$ är ett heltal $p^3 + 2p = k \cdot 3$

3. Induktionssteget, visa att påståendet i så fall stämmer för $n = p + 1$, alltså att $(p + 1)((p + 1)^2 + 2) = m \cdot 3$ där $m$ är ett heltal.

*Bevis*:
$\text{VL} = (p + 1)((p + 1)^2 + 2) =$
$= (p + 1)(p^2 + 2p + 3) =$
$= p^3 + 2p^2 + 3p + p^2 + 2p + 3 =$
$= p^3 + 2p + 3p^2 + 3p + 3 =$
$= k \cdot 3 + 3(p^2 + p + 1) =$
$= 3(k + p^2 + p + 1) =$
$= m \cdot 3 = \text{HL}$

Uttrycket är alltså delbart med 3 alla positiva värden på $n$.

V.S.V.

**29** $C_5 = 42$
*Ledtråd*:
Sätt in $n = 0$ i formeln och beräkna $C_1$.

Sätt in $n = 1$ i formeln och beräkna $C_2$, osv.

**30** 127 olika sätt.
*Ledtråd*:
Antalet färger kan vara 1–7 st.

**31** a) Den inverterade talföljden

$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{27} \quad \ldots$

är geometrisk eftersom kvoten mellan ett tal och det närmast föregående är konstant $\frac{2}{3}$

Den inverterade talföljden

$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{20} \quad \ldots$

är inte aritmetisk eftersom differensen mellan ett tal och det närmast föregående inte är konstant.

b) Samma resultat som i a).
T.ex:
Geometrisk talföljd
1 2 4 8 …

Den inverterade talföljden

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \ldots$

är också geometrisk.

Aritmetisk talföljd
1 2 3 4 …
Den inverterade talföljden

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \ldots$

är inte aritmetisk.

c) En geometrisk talföljd kan skrivas $a \quad ak \quad ak^2 \quad ak^3 \quad \ldots$

Den inverterade talföljden

$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{ak} \quad \frac{1}{ak^2} \quad \frac{1}{ak^3} \quad \ldots$

Kvoten mellan ett tal och det närmast föregående är konstant $\frac{1}{k}$

En aritmetisk talföljd kan skrivas

$a \quad a + d \quad a + 2d \quad a + 3d \quad \ldots$

Den inverterade talföljden

$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{a+d} \quad \frac{1}{a+2d} \quad \frac{1}{a+3d} \quad \ldots$

Differensen mellan ett tal och det närmast föregående är inte konstant.

**32** a) A0 84,1 cm × 118,9 cm
A1 59,5 cm × 84,1 cm
A2 42,0 cm × 59,5 cm
A3 29,7 cm × 42,0 cm
A4 21,0 cm × 29,7 cm

b) $a_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \qquad b_0 = \sqrt{\sqrt{2}}$

$a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{2}} \qquad b_n = a_{n-1}$

**33** $x = 8$ och $y = 0{,}8$
eller
$x = 2{,}375$ och $y = 0{,}0125$
*Ledtråd*:
Ställ upp och lös ett ekvationssystem.

**34** *Lösning*:

1. För $n = 1$ antar uttrycket värdet
$2^1(5^2 - 2^2) = 2(25 - 4) =$
$= 2 \cdot 21 = 42 = 7 \cdot 6$
som är delbart med 7.

2. Induktionsantagande (påståendet stämmer för $n = p$)
$2^p(5^{2p} - 2^{2p}) = 7 \cdot k,$
där $k$ är ett heltal.

3. Induktionssteget, visa att påståendet i så fall stämmer för $n = p + 1$, alltså att
$2^{p+1}(5^{2(p+1)} - 2^{2(p+1)}) = 7 \cdot m$
där $m$ är ett heltal.

*Bevis*

$\text{VL} = 2^{p+1}(5^{2(p+1)} - 2^{2(p+1)}) =$
$= 2 \cdot 2^p(5^2 \cdot 5^p - 2^2 \cdot 2^p) =$
$= 2 \cdot 2^p(25 \cdot 5^p - 4 \cdot 2^p) =$
$= 2 \cdot 2^p(21 \cdot 5^p + 4(5^p - 2^p)) =$
$= 2 \cdot 2^p \cdot 21 \cdot 5^p + 8 \cdot 2^p(5^p - 2^p) =$
$= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^p \cdot 5^p + 8 \cdot 7 \cdot k =$
$= 7(2 \cdot 3 \cdot 2^p \cdot 5^p + 8k) =$
$= 7 \cdot m = \text{HL}$

V.S.V.